a/ $p_{n+1}=p(AA)=p_n^2+1/2.p_n.q_n+\ 1/2.p_n.q_n+1/4.q_n^2=\left(p_n+\frac{q_n}{2}\right)^2$

b/ $r_{n+1}=p(aa)=r_n^2+1/2.r_n.q_n+\ 1/2.r_n.q_n+1/4.r_n^2=\left(r_n+\frac{q_n}{2}\right)^2$

c/ On a $p_{n+1}+q_{n+1}+r_{n+1}=1$ $q_{n+1}=1-p_{n+1}-r_{n+1}=1-\left(p_n+\frac{q_n}{2}\right)^2-\left(r_n+\frac{q_n}{2}\right)^2$

4. a/ (Par recurrence)

Soit $n\in\mathbb{N}$: supposons que et montrons que $p_{n+1}-r_{n+1}=\alpha$

$p_{n+1}-r_{n+1}=\left(p_n+\frac{q_n}{2}\right)^2-\left(r_n+\frac{q_n}{2}\right)^2=p_n^2-r_n^2+p_nq_n-r_nq_n=(p_n-r_n).(p_n+r_n+q_n)$

$=(p_n-r_n).1=\alpha$

Conclusion : pour tout n on a $\boxed{p_n-r_n=\alpha}$

b/ $2r_n+q_n=r_n+1-p_n=1+(r_n-p_n)=1-\alpha$

c/ $2r_n+q_n=1-\alpha$ $q_n=1-\alpha-2r_n$ $r_{n+1}=\left(r_n+\frac{1-\alpha-2r_n}{2}\right)^2=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$

r_n est constante p_n est constante (car $p_n=\alpha+r_n$)
et q_n est constante (car $q_n=1-\alpha-2r_n$)

EX 21 :

1. P(au moins un billet gagnant)=1-P(aucun billet gagnant)

$$=1-\frac{C_{50}^2}{C_{100}^2}=1-\frac{1225}{4950}=\frac{149}{198}$$

2. a/ p_n=1-P(aucun billet gagnant)

$$=1-\frac{C_n^2}{C_{2n}^2}=1-\frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}}=1-\frac{\frac{n.(n-1)}{2}}{\frac{(2n-1).2n}{2}}=1-\frac{n-1}{4n-2}=\frac{3n-1}{4n-2}$$

b/ $p_1=\frac{3-1}{4-2}=1$ explication : si 2 billets seulement sont mises en vente et qu'un promeneur achète les deux billets alors il est certain qu'il ait au moins un billet gagnant.

c/ pour tout entier n non nul on a :

$$\left.\begin{array}{l} p_n-\frac{3}{4}=\frac{3n-1}{4n-2}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4.(2n-1)}\geq 0\Rightarrow p_n\geq\frac{3}{4} \\ p_n-1=\frac{3n-1}{4n-2}-1=\frac{-n+1}{4n-2}\leq 0\Rightarrow p_n\leq 1 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{3}{4}\leq p_n\leq 1$$

Qarray.tn Aqra Blech- Qarray.tn